کاربرد تابع جریمه پویا در حل مسئله تخصیص همگانی تعادلی با محدودیت ظرفیت ناوگان

حسین محمدی[1]، عباس بابازاده[2]

۱- مربی دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمانشاه

۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

چکیده

هدف از حل مسئله تخصیص همگانی برآورد جریان تعادلی واردراپ برای شبکه‌های همگانی است. برای شبکه‌های غیرمتراکم، با زمان سفرها و تواترهای ثابت کمانها، مسئله به صورت یک مدل بهینه سازی خطی فرمولبندی و با روشی بسیار کارا حل می‌شود. در صورت در نظرگیری محدودیت ظرفیت ناوگان، این مسئله با اضافه کردن نوعی تابع جریمه وابسته به جریان به زمان سفر کمانها بصورت یک مدل تکمیلی غیر خطی بر حسب جریان در مسیر فرمولبندی و با استفاده از روشی تکراری حل می‌شود. هر تکرار این روش شامل تجزیه مسئله روی زوجهای مبدا- مقصد و سپس حل هر زیرمسئله تکمیلی با استفاده از روش خطی‌سازی متوالی است. هدف این مقاله ارائه روشی کاراتر برای حل این مدل تکمیلی است. در هر تکرار این روش، هر زیر مسئله تکمیلی قبل از حل با حذف برخی از معادلات تکمیلی آن آزاد سازی می‌شود. روش پیشنهادی برای شبکه ای نمونه آزمایش می‌شود ونتایج بدست آمده با نتایج روش قبلی مقایسه می‌شوند.

کلید واژه‌ها: تخصیص همگانی، تعادل واردراپ، محدودیت ظرفیت،تابع جریمه پویا.

---

[1] کارشناس ارشد مهندسی عمران- مهندسی راه و ترابری، mohammadi8049@ut.ac.ir

[2] استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، ۶۱۱۱۲۱۷۶، ababazadeh@ut.ac.ir

۱- مقدمه

برنامه‌ریزی سیستمهای حمل‌ونقل همگانی شهری نیازمند استفاده از مدلهای تخصیص همگانی به منظور برآورد چگونگی توزیع مسافران بین خطوط همگانی است. هر چند این نوع مدلها در دو دهه اخیر پیشرفت چشمگیری داشته اند، ولی در آنها به چگونگی در نظرگیری اثرات تراکم مسافر (شلوغی) در وسایل نقلیه همگانی بر جریانهای برآورد شده توجه کمتری شده است.
افزایش تراکم مسافر در وسایل نقلیه می‌تواند زمان‌سفر مسافر در داخل وسایل نقلیه را افزایش دهد. برای نمونه، تراکم در خطوط سریع‌السیر موجب می‌شود که مسافر سوار خطوط معمولی شود و در نتیجه زمان سفر در داخل وسیله او افزایش یابد. این تاثیر را می‌توان با در نظر گرفتن زمان داخل وسیله به صورت تابعی از جریان مسافر مدل کرد. از طرفی، افزایش تراکم در وسایل نقلیه باعث کاهش ظرفیت باقیمانده آنها، و در نتیجه موجب افزایش زمان انتظار مسافر در ایستگاه، و به علاوه تغییر الگوی توزیع مسافران بین خطوط ورودی به ایستگاه می‌شود. این دو تاثیر را نیز می‌توان با در نظرگیری تابعی وابسته به جریان برای تواتر ورود وسایل نقلیه هر خط به ایستگاه مدل کرد. بر این اساس، مدلهای تخصیص همگانی به سه گروه غیرمتراکم، کمی متراکم، و کاملاً متراکم تقسیم می‌شوند. در مدلهای غیرمتراکم زمان سفر در داخل وسایل نقلیه و نیز تواتر حرکت وسایل نقلیه هر خط مستقل از جریان مسافر هستند، در حالی که در مدلهای کمی‌متراکم یکی، و در مدلهای کاملاً متراکم هر دو به جریان مسافر بستگی دارند.
اثرات تراکم به تدریج وارد مدلهای تخصیص همگانی شده است. نگوین و پالوتینو [۱] و اشپیز و فلورین [۲] اولین پژوهشگرانی هستند که مسئله تخصیص همگانی نیمه متراکم را با فرض زمان‌سفر وابسته به جریان فرمولبندی کردند. وو و همکاران [۳] مسئله نیمه متراکم نگوین و پالوتینو را با استفاده از روش ژاکوبی خطی‌شده برای یک مثال در ابعاد متوسط حل کردند. مدلهای تخصیص همگانی بوزاینه- ایاری و همکاران [۴] و کامینیتی و کوریا [۵] از نوع کاملاً متراکم هستند، ولی برای هیچیک روش حل مناسبی برای مسایل واقعی ارایه نشده است. بابازاده [۶] یک مدل کاملاً متراکم پیشنهاد، و بر اساس آن مسئله تخصیص همگانی با زمان سفرهای وابسته به جریان و تواترهای ثابت را برای شبکه‌ای واقعی توسط روش خطی‌سازی متوالی حل کردند. سپدا و همکاران [۷] یک فرمولبندی جایگزین برای مدل کامینیتی وکوریا ارایه، و این مدل را با استفاده از روش متوسط‌گیری متوالی برای مسایلی واقعی با در نظرگیری زمان سفرهای ثابت و تواترهای وابسته به جریان حل کردند. بابازاده و آشتیانی [۸] با الهام گرفتن از کار قبلی [۶]، مدل تکمیلی تخصیص همگانی را در حالت زمان سفر ثابت و تواتر وابسته به جریان ارائه و با استفاده از روشی شبیه به MSA برای

شبکه‌ای با ابعاد متوسط حل کردند. مقایسه نتایج این روش با روش سپدا نشان از کارایی یکسان آنها داشت. محمدی و بابازاده [۹] روشی تکراری برای حل مسئله تخصیص همگانی با زمان سفر ثابت و تواتر وابسته به جریان پیشنهاد دادند که در هر تکرار آن زیرمسایل غیرخطی توسط حذف برخی از معادلات تکمیلی آزاد سازی می‌شود. هر زیر مسئله آزاد شده، در مقایسه با زیرمسئله اصلی، اولا دارای ابعادی کوچکتری است، و ثانیا قابل خطی‌سازی شدن است. نتایج این روش حل برای شبکه‌ای نمونه با نتایج حاصل از روش بابازاده [۶] مقایسه شد.

در این مقاله، با الهام از کارهای بابازاده [۶] و محمدی و بابازاده [۹] روشی تکراری برای حل مدل تکمیلی تخصیص همگانی در حالت زمان سفر وابسته به جریان و تواتر ثابت پیشنهاد می‌شود. در هر تکرار این روش، با حذف برخی معادلات تکمیلی، نسخه‌ای آزاد شده از مدل اصلی توسط روش خطی‌سازی متوالی حل می‌شود. نتایج این روش برای شبکه‌ای نمونه با محددودیت ظرفیت ناوگان ارایه و با نتایج روش بابازاده مقایسه می‌شود.

۲- مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت ناوگان

یک سیستم حمل ونقل همگانی مجموعه‌ای از خطوط همگانی است که روی یک شبکه معابر تعریف می‌شود. هر خط همگانی دارای مسیری ثابت به صورت دنباله ای از گره‌ها و کمانهای شبکه معابر، و دارای ناوگانی از وسایل نقلیه یکسان است که روی آن مسیر حرکت می کنند. ایستگاههای هر خط گره‌هایی از مسیر آن هستند که مسافران می توانند در آنها سوار یا پیاده شوند. هر سفر مبدأ- مقصد در سیستم همگانی میتواند با ترکیبی از چهار نوع حرکت پیاده‌روی، سوارشدن، (طی مسیر در) داخل وسیله، و پیاده‌شدن انجام شود. برای هر ماتریس تقاضای مبدأ- مقصد مفروض، مسئله تخصیص همگانی عبارت از برآورد جریان مسافر به تفکیک حرکات فوق است.

در سیستمهای همگانی مبتنی بر تواتر، فرض می شود که وسایل نقلیه هر خط با یک تواتر اسمی ثابت و به طور پیوسته روی مسیر آن خط حرکت می کنند. به علاوه، فرض می شود که زمان انتظار در ایستگاه برای سوار شدن به هر خط متغیری تصادفی و مستقل از سایر خطوط است. در اینصورت، هر مسافر برای کاهش زمان انتظار خود در هر ایستگاه میتواند، به جای انتخاب یک خط مشخص، یک مجموعه خطوط جذاب را در نظر بگیرد و سوار اولین خط جذاب ورودی به ایستگاه بشود

هر مجموعه مشخصی از کمانهای پیاده، خطوط جذاب در ایستگاهها، و ایستگاه‌های پیاده‌شدن از این خطوط که برای سفر از یک مبدأ به یک مقصد انتخاب شوند، یک استراتژی برای آن مبدأ- مقصد نامیده می‌شود. تمام مدلهای تخصیص همگانی مبتنی بر استراتژی روی یک شبکه جهت‌دار خاص به

نام شبکه همگانی تعریف می‌شوند که هر کمان آن مربوط به یکی از حرکات پیاده‌روی، سوارشدن، داخل وسیله، و پیاده‌شدن است.

فرض کنید $G(I, A)$ یک شبکه همگانی با مجموعه گره‌ای I و مجموعه کمانهای جهت‌دار A است، و مجموعه کمانهای خروجی و ورودی به هر گره i را به ترتیب با A_i و A_i^- نشان دهید. فرض کنید $A^v \subseteq A$ و $A^b \subseteq A$ به ترتیب مجموعه کمانهای داخل‌وسیله و سوارشدن، $A_i^b = A_i \cap A^b$ مجموعه کمانهای سوارشدن خروجی از هر گره i، و $I^b \subseteq I$ مجموعه گره‌های ایستگاه (با حداقل یک کمان سوار شدن خروجی) باشند. هر کمان a دارای یک تابع زمان سفر وابسته به جریان $t_a(\cdot)$، و یک تواتر مؤثر وابسته به جریان $F_a(\cdot)$ است. فرض کنید که توابع t_a و F_a به ترتیب غیرمنفی و مثبت هستند، و تعریف کنید $\mathbf{t} = (t_a)_{a \in A}$ و $\mathbf{F} = (F_a)_{a \in A^b}$. فرض کنید d_r^s تقاضای سفر از هر مبدأ r به هر مقصد $s \neq r$ در شبکه G است. مجموعه گره‌های با تقاضای ورودی مثبت را با $S \subseteq I$ نشان دهید و آن را مجموعه گره‌های مقصد بنامید، و مجموعه گره‌های با تقاضای مثبت به هر مقصد s را با $R_s \subseteq I \setminus \{s\}$ نشان دهید و آنرا مجموعه مبادی برای مقصد s بنامید . فرض کنید K_{rs} مجموعه‌ای غیرتهی شامل مسیرهای جهت‌دار از مبدأ r به مقصد s است، و بالاخره فرض کنید که δ_{ak} برابر با ۱ است اگر کمان a روی مسیر k باشد، و در غیر اینصورت صفر است.

در مدلهای مبتنی بر استراتژی، هر مسافر برای سفر از مبدأ به مقصد خود از یک استراتژی مثل $\tilde{G}(\tilde{I}, \tilde{A})$، زیرشبکه‌ای جهت دار و بدون حلقه از G که مبدا را به مقصد متصل می‌کند، ستفاده می‌نماید. به علاوه، در این نوع مدلها فرض می‌شود که جریان استراتژی $\tilde{G}$ در هر گره ایستگاه $i \in \tilde{I}^b$ آن به نسبت تواتر بین کمانهای خروجی $\tilde{A}_i$ توزیع می‌شود، و امید زمان انتظار مسافر در گره i برابر با معکوس مجموع تواتر آن کمانها است. در نهایت، بر اساس اصل تعادل واردراپ، هر مسافر برای سفر از مبدأ به مقصد خود از یک استراتژی با کمترین امید زمان سفر (کوتاهترین استراتژی) بین آن زوج مبدأ- مقصد استفاده کند. به عبارت دیگر، در تعادل استفاده کننده، امید زمان سفر استراتژی‌های با جریان مثبت بین هر زوج مبدأ- مقصد باید با هم برابر و کوچکتر یا مساوی این مقدار برای سایر استراتژی‌ها باشد. مدلهای تخصیص با چنین خصوصیتی را مدلهای تعادلی می‌نامند.

مسئله تخصیص همگانی مسئله تعیین جریان در کمانهای شبکه همگانی است. فرض کنید x_a^s جریان حاصل از همه سفرهای به مقصد s در کمان $a \in A$، w_i^s کل زمان انتظار برای همه سفرهای به مقصد s در گره $i \in I^b$ باشند و تعریف کنید $\mathbf{x}^s = (x_a^s)$، $\mathbf{w}^s = (w_i^s)$، $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^s)$ و $\mathbf{W} = (\mathbf{w}^s)$. کل جریان در کمان a را برابر $x_a = \sum_{s \in S} x_a^s$ قرار دهید و تعریف کنید $\mathbf{x} = (x_a)$. همچنین کمترین امید زمان سفر از گره i به مقصد s را با u_i^s نشان دهید و تعریف کنید $\mathbf{u}^s = (u_i^s)$ و $\mathbf{U} = (\mathbf{u}^s)$.

اشپیز و فلورین [۲] با فرض $\mathbf{t}$ و $\mathbf{F}$ به صورت توابع ثابت، مسئله تخصیص همگانی غیر متراکم مبتنی بر استراتژی را به صورت یک برنامه خطی، که مدل استراتژی بهینه نامیده می‌شود، بر حسب متغیرهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{W}$ فرمولبندی کردند. این پژوهشگران به کمک شرایط کمبود تکمیلی در برنامه‌ریزی خطی، روش حلی برای یافتن یک جواب حدی برای مسئله ارایه می‌دهند.

بابازاده [۶] با فرض پیوسته و محدود بودن توابع $\mathbf{t}$ و $\mathbf{F}$ مسئله تخصیص همگانی تعادلی مبتنی بر استراتژی را به صورت یک مدل تکمیلی غیرخطی بر حسب بردار جریان در مسیر $\mathbf{f}=(f_k)$ فرمول بندی کردند. در این مدل از متغیر کمکی λ_a^s (نوعی جریمه) برای هر کمان a و هر مقصد s استفاده شده است. تعریف کنید $\boldsymbol{\lambda}^s=(\lambda_a^s)$ و $\boldsymbol{\Lambda}=(\boldsymbol{\lambda}^s)$. متغیرهای مدل تکمیلی در چهار گروه قرار می‌گیرند که به ترتیب شامل اجزای $\mathbf{U}$، $\mathbf{f}$، $\boldsymbol{\Lambda}$ و $\mathbf{W}$ بوده، و به ازای هر متغیر u_{rs}، f_k، λ_a^s و w_i^s یک معادله تکمیلی و دو نامعادله (یکی از این نامعادلات شرط غیر منفی بودن است) در مدل وجود دارند.

بابازاده [۶] برای در نظرگیری محدودیت ظرفیت ناوگان در مسئله تخصیص همگانی، مدل تکمیلی تخصیص همگانی را با $\mathbf{t}$ وابسته به جریان و $\mathbf{F}$ ثابت به صورت زیر بیان می‌کنند:

$$(\textstyle\sum_{k\in K_{rs}} f_k - d_r^s)u_r^s = 0 \qquad \forall r\in R_s,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۱)$$

$$\textstyle\sum_{k\in K_{rs}} f_k - d_r^s \ge 0 \qquad \forall r\in R_s,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۲)$$

$$u_r^s \ge 0 \qquad \forall r\in R_s,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۳)$$

$$(\textstyle\sum_{a\in A} t_a(x_a)\delta_{ak} + \sum_{a\in A^b}\lambda_a^s\delta_{ak} - u_r^s) f_k = 0 \qquad \forall k\in K_{rs},\ r\in R_s,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۴)$$

$$\textstyle\sum_{a\in A} t_a(x_a)\delta_{ak} + \sum_{a\in A^b}\lambda_a^s\delta_{ak} - u_r^s \ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs},\ r\in R_s,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۵)$$

$$f_k \ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs},\ r\in R_s,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۶)$$

$$(1-\textstyle\sum_{a\in A_i^b} F_a\lambda_a^s)\, w_i^s = 0 \qquad \forall a\in I^b,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۷)$$

$$1-\textstyle\sum_{a\in A_i^b} F_a\lambda_a^s \ge 0 \qquad \forall a\in I^b,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۸)$$

$$w_i^s \ge 0 \qquad \forall a\in I^b,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۹)$$

$$(F_a w_i^s - x_a^s)\,\lambda_a^s = 0 \qquad \forall a=(i,j)\in A^b,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۱۰)$$

$$F_a w_i^s - x_a^s \ge 0 \qquad \forall a=(i,j)\in A^b,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۱۱)$$

$$\lambda_a^s \ge 0 \qquad \forall a\in A^b,\ s\in S, \qquad (\text{P}۱\text{-}۱۲)$$

که در آنها:

$$x_a^s = \textstyle\sum_{r\in R_s}\sum_{k\in K_{rs}} f_k\,\delta_{ak} \qquad \forall a\in A^b,\ s\in S, \qquad (۱)$$

$$x_a = \textstyle\sum_{s\in S} x_a^s \qquad \forall a\in A, \qquad (۲)$$

$$t_a(x_a) = t_a^0 + \begin{cases} \varphi_a(x_a) & a \in A^v \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall\, a \in A \tag{۳}$$

در مدل بالا t_a^0 زمان سفر ثابت کمان $a \in A$ و $\varphi_a(\cdot)$ نوعی تابع جریمه است کـه بـرای در نظرگیـری محدودیت ظرفیت به زمان سفر ثابت هر کمان داخل وسیله $a \in A^v$ اضافه می‌شود. تابع جریمـه بـرای هر کمان داخل وسیله a نظیر خط همگانی l به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_a(x_a) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1 - \dfrac{x_a}{F_l^n c_l}} & if \quad x_a / F_l^n c_l < 1 - \rho \\ \alpha \dfrac{x_a}{F_l^n c_l} + \beta & otherwise \end{cases} \tag{۴}$$

در این رابطه F_a^0 تواتر اسمی خط، c_a ظرفیت وسیله نقلیه خط، و $0 < \rho < 1$ پارامتر جریمه است که انتخاب مقدار کوچکتر برای آن دقت در نظرگیری ظرفیت را افزایش می دهد. پس از تعیین ρ (با توجه به دقت مورد نیاز)، دو پارامتر α و β به گونه‌ای تعیین می شوند که تابع جریمه در نقطه شکست $1-\rho$ مشتق‌پذیر پیوسته باشد. برای برقراری این شرط باید $\alpha = 1/\rho$ و $\beta = 2 - 1/\rho$ باشند. طبق رابطه فوق مقدار جریمه در جریان صفر برابر ρ است و با افزایش جریان ابتدا به تدریج و پس از رسیدن جریان به نزدیکی ظرفیت، به شدت افزایش می یابد.

۳- روش حل بابازاده

بابازاده [۶] مدل (P۱) را توسط یک روش تکراری برای یک شبکه واقعی حل کرد. در این روش از سه ایده تجزیه، تولید مسیر و خطی‌سازی استفاده شده است. روش حل در گام صفر (آماده سازی) با تعیین یک $\lambda_a^s = 1/\sum_{a \in A_i^b} F_a$ اولیه برای هر $s \in S$ و هر $a \in A^b$ شروع می‌شود. سپس، برای هر $s \in S$، درخت کوتاهترین مسیر با ریشه (مقصد) s بر اساس طولهای $t_a(0) + \lambda_a^s$ برای $a \in A^b$ و t_a برای $a \in A \setminus A^b$ تعیین و به عنوان مسیر فعال اولیه کل تقاضای d_r^s به آن مسیر تخصیص میابد و **f** بهنگام می‌شود (جریان مسیرهای غیر فعال برابر صفر است و لذا تنها مسیرهای فعال و نیز مقدار جریان در آنها ذخیره می‌شوند). اجزای **X** توسط (۱) و اجزای **W** توسط $w_i^s = x_a^s / F_a$ محاسبه می‌شوند. در ضمن، برای هر مقصد s و هر گره ایستگاه $i \in I^b$ که دارای یک کمان خروجی $a \in A_i^b$ روی مسیرهای فعال به مقصد s باشد $\lambda_a^s = 1/F_a$، و برای سایر کمانهای در A_i^b $\lambda_a^s = 0$ قرار داده می‌شوند. بدین صورت $\boldsymbol{\Lambda}$ بهنگام می‌شوند. در نهایت بردار **x** توسط (۲) محاسبه می‌شوند.

در گام ۱ (تولید مسیر و آزمون توقف)، ابتدا مسیرهای با جریان صفر از مجموعه مسیرهای فعال حذف میشوند. سپس برای هر $s \in S$ کوتاهترین مسیر از هر مبدا به مقصد s بر اساس طولهای $t_a(x_a)+\lambda_a^s$ برای $a \in A^b$ و t_a برای $a \in A \setminus A^b$ تعیین، و طول آن در u_r^s قرار میگیرد. این مسیرها، در صورتی که جدید باشند، به مجموعه مسیرهای فعال اضافه می‌شوند. در این مرحله لزوما تمام (P۱) به جز (P۱-۴) برقرار هستند. آزمون توقف نیز در این گام و با محاسبه تابع شکاف مبتنی بر مسیر:

$$PG(\mathbf{U},\mathbf{f}) = TC(\mathbf{X}(\mathbf{f})) - \sum_{s\in S}\sum_{r\in R_s} d_r^s u_r^s \qquad (۵)$$

انجام میشود، که در آن TC کل (امید) زمان سفر در جریان $\mathbf{f}$ است. زیرا اگر PG برابر صفر باشد آنگاه $(\mathbf{U},\mathbf{f},\mathbf{W},\mathbf{\Lambda})$ در (P۱) صدق می‌کند [۶]. روش حل متوقف می‌شود اگر به ازای یک ε مثبت و کوچک (دقت جواب) $PG/TC \le \varepsilon$ باشد. در غیر اینصورت، در گام ۲ (تجزیه و خطی سازی)، مسئله (P۱)، به منظور کاهش ابعاد آن، روی شبکه حاصل از مسیرهای فعال تعریف و به علاوه برحسب زوجهای مبدأ- مقصد به زیرمسایلی کوچکتر تجزیه می‌شود. زیرمسئله هر زوج مبدا- مقصد که خود یک مسئله تکمیلی غیرخطی است توسط یک روش تکراری خطی سازی حل تقریبی میشود. در هر تکرار این روش، زیرمسئله در جواب فعلی $\mathbf{f}$ خطی سازی شده (توسط خطی سازی (P۱-۴) و (۵-P۱)) و پس از حل آن توسط روش لمکه [۱۱] جریان $\mathbf{f}$ بهنگام میشود. روش خطی سازی تکرار میشود تا آنکه جوابی با دقت قابل قبول برای زیر مسئله غیرخطی بدست آید. پس از حل زیرمسایل مربوط به هر مقصد s، بردارهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{W}$ بهنگام می‌شوند. سپس، مجموع اجزای متناظر بردارهای $\boldsymbol{\lambda}^s$ حاصل از حل زیرمسایل مربوط به مقصد s محاسبه و در بردار کمکی $(\sigma_a)_{a\in A^b}$ قرار داده شده و جهت برقرار شدن رابطه $\sum_{a\in A_i^b} F_a\lambda_a^s = 1$ توسط رابطه زیر مقیاس می‌شوند:

$$\lambda_a^s = \frac{\sigma_a}{\sum_{a'\in A_i^b} F_{a'}\sigma_{a'}} \qquad \forall a \in A_i^b,\ i\in I^b \qquad (۱۴)$$

بردار $\mathbf{x}$ نیز پس از حل زیرمسایل همه زوج های مبدا- مقصد محاسبه می‌شود. با بازگشت به گام ۱ شرط همگرایی جواب جدید $(\mathbf{U},\mathbf{f},\mathbf{W},\mathbf{\Lambda})$بررسی و دستور حل تا رسیدن به جوابی با دقت ε (حداکثر شکاف مبتنی بر مسیر در جواب نهایی) تکرار می‌شود. تکرارصفر روش حل معادل انجام گام صفر، و هر تکرار بعدی آن شامل یک بار انجام گامهای ۱ و ۲ است.

۳- روش حل پیشنهادی

وجود معادلات تکمیلی (P۱-۷) و (P۱-۱۰) مربوط به متغیرهای λ_a^s و w_i^s در مدل تکمیلی

تخصیص همگانی (P۱) باعث سختی حل آن نسبت به مدل تکمیلی تخصیص سواری می‌شود به طوری که حل آن برای شبکه‌های بزرگ وقتی که تواتر یا زمان سفر وابسته به جریان باشند بسیار سخت می‌شود.

روش این مقاله برای حل (P۱) با استناد به روش ارائه شده در [۹] روشی تکراری است که در هر تکرارآن، با حذف معادلات تکمیلی و نامعادلات مربوط به متغیرهای λ_a^s و w_i^s، یک نسخه آزاد شده از مدل تکمیلی (P۱) حل می‌شود. شرایط مربوط به متغیرهای λ_a^s را می توان به صورت ضمنی در روش حل ایجاب کرد. برای این منظور کافی است روابط زیربرقرار شود:

$$\sum_{a\in A_i^b} F_a \lambda_a^s = 1,\ \lambda_a^s \ge 0,\quad \forall a \in A_i^b, i \in I^b \tag{۶}$$

$$\lambda_a^s \ge 0,\qquad \forall a \in A_i^b, i \in I^b \tag{۷}$$

به علاوه، شرایط متغیر w_i^s نیز برقرار خواهد شد، اگر

$$x_a^s \le F_a w_i^s,\qquad \forall a \in A_i^b, i \in I^b \tag{۸}$$

$$\lambda_a^s = 0 \ \ if\ \ x_a^s < F_a w_i^s,\qquad \forall a \in A_i^b, i \in I^b \tag{۹}$$

فرم آزاد شده مسئله (P۱) در تکرر n بر پایه جواب $\mathbf{f}^n$ و $\mathbf{\Lambda}^n$ بدست آمده در تکرار $n-1$ به صورت زیر تعریف می‌شود که مدلی تکمیلی بر حسب متغیرهای $\mathbf{U}$ و $\mathbf{f}$ است:

$$(\sum_{k\in K_{rs}} f_k - d_r^s) u_r^s \ge 0 \qquad \forall r \in R, s \in S \tag{P۲-۱}$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k - d_r^s \ge 0 \qquad \forall r \in R, s \in S \tag{P۲-۲}$$

$$u_r^s \ge 0 \qquad \forall r \in R, s \in S \tag{P۲-۳}$$

$$(\sum_{a\in A} (t_a(x_a) + \sum_{a\in A^b} \lambda_a^{s,n-1} \psi(y_a^s))\delta_{ak} - u_r^s) f_k = 0 \qquad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \tag{P۲-۴}$$

$$\sum_{a\in A} (t_a(x_a) + \sum_{a\in A^b} \lambda_a^{s,n-1} \psi(y_a^s))\delta_{ak} - u_r^s \ge 0 \qquad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \tag{P۲-۵}$$

$$f_k \ge 0 \qquad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \tag{P۲-۶}$$

که در آن

$$y_a^s = \frac{x_a^s}{F_a \dfrac{x_{a'}^s}{F_{a'}}} \qquad \forall a \in A_i^b, a' = \arg(\max_{b\in A_i^b} x_b^{s,n-1}/F_a), i \in I^b, s \in S \tag{۱۰}$$

$$\psi(y) := \begin{cases} \dfrac{\rho}{2(1-y)} & if \quad y < 1-\rho \\ \dfrac{y-1}{2\rho} + 1 & if \quad y \ge 1-\rho \end{cases} \tag{۱۱}$$

و متغیرهای x_a^s و x_a طبق روابط (۱) و (۲) به صورت توابعی از $\mathbf{f}$ تعریف می‌شوند. در این مدل، y_a^s

متغیری کمکی است که برای هر $s \in S$ و هر $a=(i,j)\in A^b$ طبق رابطه (۱۰) تعریف می‌شود. در این رابطه از تابع $x^s_{a'}(\mathbf{f})/F_{a'}$ که نسبت به $\mathbf{f}$ مشتق پذیر می‌باشد به عنوان تقریبی از w^s_i استفاده شده است. در واقع $a' \in A^b_i$ کمانی است که $w^{s,n-1}_i$ بر مبنای آن حساب شده است. واضح است که (P۲) یک مسئله تخصیص ترافیک با تابع زمان سفر مسیر

$$T_k(\mathbf{f}) = \sum_{a\in A}(t_a(\mathbf{f}) + \sum_{a\in A^b}\lambda_a^{s,n-1}\psi(y_a^s(\mathbf{f})))\delta_{ak}$$

میباشد که تابعی مثبت صعودی و مشتق پذیر است.

اگر $\mathbf{f}^n$ جواب بدست آمده از حل مدل تکمیلی (P۲) در تکرار n باشد، $\mathbf{X}^n$ طبق معادله (۱) در آن تکرار محاسبه می‌شود. سپس اجزای $\mathbf{W}^n$ و $\mathbf{\Lambda}^n$ طبق روابط زیر بهنگام میشوند:

$$\lambda_a^{s,n} = \lambda_a^{s,n-1}\psi(y_a^s) \qquad \forall\, a\in A^b, s\in S \qquad (۱۲)$$

$$w_i^{s,n} = \max_{a\in A_i^b} x_a^{s,n}/F_a \qquad \forall a\in A_i^b, i\in I^b, s\in S \qquad (۱۳)$$

چون اجزای $\mathbf{\Lambda}^{n-1}$ غیر منفی‌اند، اجزای $\mathbf{\Lambda}^n$ نیز غیرمنفی خواهند شد و (۷) برقرار است. به علاوه، به منظور برقرار کردن (۶)، $\lambda_a^{s,n}$ برای هر $s\in S$ و هر $a=(i,j)\in A^b$ با تقسیم بر عبارت $\sum_{a'\in A_i^b}F_{a'}\lambda_{a'}^{s,n-1}\psi(y_{a'}^s)$ مقیاس میگردد. بدین ترتیب اجزای $\mathbf{\Lambda}^n$ بر مبنای جواب $\mathbf{f}^n$ بهنگام می‌شوند. رابطه بازگشتی (۱۲)، به ازای پارامتر مثبت و کوچک ρ، توسط شهپر و همکاران [۱۰] تحت عنوان تابع جریمه پویا معرفی شده است. زیرا مقدار λ_a^s در تکرار n نسبت به تکرار $n-1$ افزایش می‌یابد اگر $y_a^s>1$ باشد و کاهش می‌یابد اگر $y_a^s<1$ باشد. بدین ترتیب، با افزایش تکرار، λ_a^s به سمت همگرا شدن پیش می‌رود. شایان ذکر است که تابع $\psi(y)$ مشتق پذیر و صعودی بوده و هر چه ρ به صفر نزدیکتر باشد تقریب بهتری از تابع مجانبی در نقطه $y=1$ خواهد بود.

واضح است که اگر $(\mathbf{U},\mathbf{f})$ جواب (P۲) باشد آنگاه $\mathbf{x}$، $\mathbf{X}$، و $\mathbf{W}$ قابل محاسبه‌اند. در اینصورت، اگر $\mathbf{\Lambda}$ همگرا شود، آنگاه به سادگی می‌توان مشاهده کرد که معادلات (۱۰)- (۱۳) روابط (۸) و (۹) را با دقت ρ تقریب می‌زنند. به علاوه، چون $\mathbf{\Lambda}$ در (۶) و (۷) نیز صدق می‌کند، $\mathbf{f}$ یک جواب با دقت ρ برای مسئله اصلی (P۱) خواهد بود.

در روش حل پیشنهادی، گام صفر (آماده سازی) مشابه گام صفر روش حل بابازاده انجام می‌شود. در گام ۱(تولید مسیر و آزمون توقف)، پس از بهنگام سازی مسیرهای فعال، علاوه بر شرط توقف $PG/TC\le\varepsilon$، همگرایی اجزای $\mathbf{\Lambda}$ به عنوان شرط توقف دوم بررسی می‌شود. در گام ۲ (تجزیه و خطی سازی)، مسئله (P۲) روی شبکه حاصل از مسیرهای فعال تعریف و برحسب زوجهای مبدأ- مقصد به زیرمسایل تکمیلی غیرخطی کوچکتر تجزیه می‌شود. سپس، هر زیرمسئله توسط روش تکراری خطی سازی (توسط خطی سازی (P۲-۴) و (P۲-۵) در جواب فعلی $\mathbf{f}$) حل تقریبی شده و جریان $\mathbf{f}$ بهنگام

می‌شود. پس از حل زیرمسایل مربوط به هر مقصد s، بردارهـای $\mathbf{X}$، $\mathbf{W}$، و $\mathbf{\Lambda}$ بـه ترتیـب طبـق (۱)، (۱۲)، و (۱۳) بهنگام شده و سپس اجزای $\mathbf{\Lambda}$ طبق (۱۴) مقیاس می‌شوند. بـردار $\mathbf{x}$ پـس از حـل همـه زیرمسایل محاسبه شده، و با بازگشت به گام ۱ شـروط همگرایـی جـواب جدیـد $(\mathbf{U},\mathbf{f},\mathbf{W},\mathbf{\Lambda})$ بررسـی می‌شوند. گام ۲ در صورت عدم همگرایی جواب تکرار می‌شود.

۵- نتایج عددی

در این بخش نتایج تخصیص همگانی متراکم با محدودیت ظرفیت ناوگان حاصل از روش پیشـنهادی و روش بابازاده [۶] برای شبکه همگانی سایوکس فالز ارایه و بـا نتـایج تخصـیص همگـانی غیـر متـراکم حاصل از روش اشپیز و فلورین [۲] مقایسه می‌شوند. روش پیشنهادی و روش بابازاده و بـه صـورت دو برنامه کامپیوتری در محیط VISUAL C++ VER6 اجرا می شوند. نتایج روش اشپیز و فلـورین نیـز توسط نرم افزار EMME به دست می‌آید. شبکه همگانی سایوکس فالز دارای ۱۲۹ گره، ۳۵۰ کمـان، و ۵۵۰ زوج مبدا- مقصد با تقاضای مثبت است [۶].

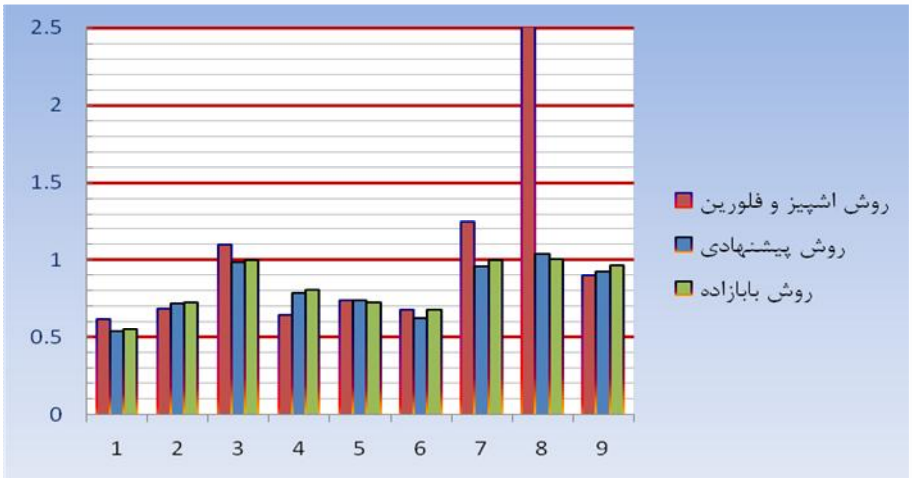
جدول ۱: *نتایج تخصیص همگانی برای شبکه سایوکس فالز*

روش حل	تعداد تکرار	کل زمان سفر	اجزای کل زمان سفر				کل جریمه	ماکزیمم جریان به ظرفیت
			انتظار	داخل وسیله	پیاده-روی	سوار شدن		
اشپیزو فلوری‌ن	۱	۱ ۲ ۱ ۲۶۰/	۲ ۹ ۲ ۶۰/	۵ ۹ ۹ ۱۴۰/	۴ ۳ ۶ ۵۱/	۷ ۹ ۶ ۷/	۰ ۰ ۰ ۰/	۲/۶
بابازاده	۹	۷ ۰ ۶ ۲۶۱/	۶ ۴ ۹ ۵۴/	۹ ۴ ۶ ۱۳۴/	۹ ۲ ۷ ۶۴/	۳ ۶ ۴ ۷/	۷ ۰ ۳ ۸/	۰ ۱ ۱/
پیشنهادی	۹	۰ ۱ ۴ ۲۵۵/	۴ ۸ ۷ ۵۵/	۹ ۱ ۹ ۱۳۱/	۲ ۸ ۵ ۶۰/	۳ ۲ ۳ ۷/	۰ ۹ ۷ ۸/	۰ ۴ ۱/

جدول ۱ نتایج به دست آمده از سـه روش تخصـیص همگـانی فـوق را نشـان مـی‌دهـد. مشـاهده می‌شود که روش اشپیز و فلورین تخصیص همگانی با زمان سفر ثابت را در یک تکرار (یکبـار محاسـبه کوتاهترین استراتژی برای هر مقصد) انجام داده و کل زمان سفر استفاده‌کننـدگان را برابـر ۲۶۰/۱۲۱ تعیین می‌کند. ولی، ماکزیمم جریان داخل وسلیه به ظرفیت خطوط همگانی در ایـن روش برابـر عـدد غیر واقعی ۲/۶۱ به دست آمده است. روش بابـازاده مسـئله تخصـیص همگـانی بـا محودیت ظرفیـت

ناوگان را در ۹ تکرار (۹ بار محاسبه درخت کوتاهترین مسیر برای هر مقصد) حل و کل زمان سفر را برابر ۲۶۱/۷۰۶ به دست می‌آورد. در این روش، با در نظرگیری اثرات تراکم توسط تابع زمان سفر (۳)، ماکزیمم جریان به ظرفیت خطوط با دقت خوبی به عدد ۱ محدود شده است. روش پیشنهادی نیز توانسته است مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت را با دقت خوبی همانند روش بابازاده حل کند. همانگونه که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، اجزای کل زمان سفر (شامل زمانهای انتظار، داخل وسیله، پیاده‌روی و سوار شدن) و نیز مقدار کل جریمه در دو روش اخیر حدود یکسانی دارند، در حالی که روش اشپیز و فلورین زمانهای انتظار، داخل وسیله و سوارشدن را بیشتر (به دلیل استفاده بیشتر از خطوط همگانی) و زمان پیاده‌روی را کمتر برآورد می‌کند، و در ضمن کل جریمه آن برابر صفر است.

شکل ۱ ماکزیمم جریان داخل به ظرفیت را به تفکیک خطوط در سه روش فوق نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شودکه در روش اشپیز و فلورین جریان داخل وسیله در خطوط ۳، ۷، و ۸ از ظرفیت این



شکل ۱: *ماکزیمم نسبت جریان به ظرفیت خطوط همگانی در شبکه سایوکس فالز*

خطوط تجاوز کرده‌اند و حتی نسبت جریان به ظرفیت در خط ۸ از ۲/۵ برابر ظرفیت آن بیشتر شده است. این در حالی است که در روشهای بابازاده و پیشنهادی جریانهای داخل وسیله با دقت مناسبی به ظرفیتها محدود شده‌اند.

جدول ۲ جزییات همگرایی دو روش بابازاده و پیشنهادی را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که کل زمان سفر به علاوه جریمه، شکاف نسبی، و نسبت جریان به ظرفیت در هر دو روش با افزایش تکرر

کاهش یافته و در نهایت جوابی محدود شده به ظرفیت و با کمتر از ۱٪ پیدا می‌شود.

جدول ۲ : *جزئیات همگرایی روش بابازاده و روش پیشنهادی برای شبکه سایوکس فالز*

شماره تکرار	کل زمان سفر + جریمه		شکاف نسبی مبتنی بر مسیر		ماکزیمم جریان به ظرفیت	
	روش بابازاده	روش پیشنهادی	روش بابازاده	روش پیشنهادی	روش بابازاده	روش پیشنهادی
۰	۱۳۲۵/۰۴۹	۱۳۲۵/۰۴۹	۰/۷۹۸۹	۰/۷۹۸۹	۲/۶۷	۲/۶۷
۱	۲۸۵/۶۵۲	۲۸۵/۴۲۰	۰/۱۳۵۸	۰/۱۳۰۳	۱/۱۰	۱/۰۶
۲	۲۷۵/۴۲۵	۲۷۳/۰۹۲	۰/۰۴۸۶	۰/۰۴۸۲	۱/۰۱	۱/۰۱
۳	۲۷۳/۹۳۰	۲۷۳/۰۷۴	۰/۰۲۵۳	۰/۰۳۹۲	۱/۰۲	۱/۰۱
۴	۲۷۰/۰۳۹	۲۷۵/۲۸۳	۰/۰۲۰۳	۰/۰۳۳۴	۱/۰۰	۱/۰۱
۵	۲۷۱/۵۲۲	۲۷۳/۵۴۶	۰/۰۱۵۵	۰/۰۳۵۵	۱/۰۱	۱/۰۱
۶	۲۷۲/۵۹۴	۲۷۳/۲۰۴	۰/۰۱۵۷	۰/۰۳۴۳	۱/۰۲	۱/۰۱
۷	۲۷۲/۹۹۶	۲۷۲/۹۰۰	۰/۰۱۳۸	۰/۰۳۳۰	۱/۰۲	۱/۰۲
۸	۲۷۰/۴۰۹	۲۶۳/۱۱۱	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۷۱	۱/۰۱	۱/۰۴

مزیت روش پیشنهادی نسبت به روش بابازاده در آزادسازی مسئله و در نتیجه کاهش ابعاد زیرمسایل تکمیلی غیرخطی حل شده (P۲ در مقایسه با P۱) در هر تکرار است، به طوریکه در مسایل عملی ابعاد زیر مسایل حل شده به کمتر از یک سوم زیرمسایل اولیه می‌رسد. با توجه به اینکه زمان حل زیرمسایل متناسب با ابعاد آنهاست و این زمان بخش عمده‌ای از کل زمان حل روش بابازاده را به خود اختصاص می‌دهد، روش پیشنهادی در مسایل بزرگ بسیار کارا خواهد بود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی کاربردی برای حل مسئله تخصیص همگانی متراکم با زمان سفرهای وابسته به جریان و تواترهای ثابت پیشنهاد و نتایج کاربرد آن برای شبکه‌ای متوسط با نتایج دو روش رقیب مقایسه شد. نتایج توانایی این روش برای حل مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت ناوگان را نشان دادند. در ضمن، روش پیشنهادی به علت آزادسازی مسئله اصلی و در نتیجه کاهش قابل توجه ابعاد زیرمسایل کارایی قابل ملاحظه‌ای در حل مسایل واقعی خواهد داشت.

۷- فهرست مراجع

1- S. Nguyen, and S. Pallottino, 1988, "Equilibrium Traffic Assignment for Large Scale Transit Networks", EuroPean Journal of OPerational Research, V. 37(2), PP. 176-186.

2- H. Spiess, and M. Florian, 1989, "OPtimal Strategies: A New Assignment Model for Transit Networks", TransPortation Research, V. 23(B), PP. 83-102.

3- J. H. Wu, M. Florian, and P. Marcotte, 1994,"Transit Equilibrium Assignment: A Model and Solution Algorithms", TransPortation Science, V. 28(3), PP. 193-203.

4- B. Bouzaïene-Ayari, M. Gendreau, and S. Nguyen, 1995,"An Equilibrium-fixed Point Model for Passenger Assignment in Congested Transit Networks", Publication CRT-95-57, Centre de Recherche sur les TransPorts, Université de Montréal.

5- R. Cominiti, and J. Correa, 2001,"Common-line and Passenger Assignment in Congested Transit Networks", TransPortation Science, V. 35(3), PP. 250-267.

۶- بابازاده، ع، ۱۳۸۳، "مسئله تخصیص همگانی تعادلی در شبکه‌های متراکم: فرمولبندی و دستورحل"، پایان‌نامه دکترا، دانشگاه صنعتی شریف.

7- M. CePeda, R. Cominiti, and M. Florian, 2006,"A Frequency-based Assignment Model for Congested Transit Networks with Strict Capacity Constraints: Characterization and ComPutation of Equilibria" TransPortation Research, V. 40(B), PP. 437-459.

۸- بابازاده، ع. و آشتیانی، ه، ذ.، ۱۳۸۶، "حل مسئله تخصیص همگانی تعادلی در شبکه‌های متراکم با توابع تواتر مؤثر"، سومین کنگره ملی عمران ۱۳۸۶، دانشگاه تبریز، دانشکده فنی- مهندسی عمران، تبریز.

۹- محمدی، ح. و بابازاده، ع.، ۱۳۹۲، "حل مسئله تخصیص همگانی متراکم به کمک تابع جریمه پویا"، دوازدهمین کنفرانس بین‌المللی حمل و نقل و ترافیک، تهران.

10- A. H. shahpar and H. Z. Aashtiani., and A. Babazadeh, 2008, "Danamic Penalty function method for the side constrained traffic assignment Problem", Management Science, V.11, 1965, PP. 681-689.

11- C. E. Lemke, 1965, "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", Management Science, V.11, PP. 681-689.

12- EMME, 1999, Software Release 9, Montreal, Canada, 1999.

Application of Dynamic Penalty Function in Solving Equilibrium Transit Assignment Problem With Fleet Capacity Constraint.

Hossein Mohammadi, Abbas Babazadeh.
1-Instructor, School of Civil Engineering, Islamic Azad University Kermanshah Branch, Kermanshah, Iran.
2- Assistant Professor, School of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract
Transit assignment problem aims to predict the Wardropian equilibrium flow for transit networks. For uncongested networks, with fixed link travel times and frequencies, the problem is formulated as a linear optimization model and solved using a very efficient method. When taking into account the fleet capacity constraint, adding a flow-depended penalty function to the link travel times, the problem is formulated into a nonlinear complementarity model in terms of path flows and solved using an iterative method. Each iteration of this method consists of decomposition of the problem on the origin-destination pairs and then solving each of the subproblems by using the iterative linearization method. The goal of this paper is presenting a more efficient method for solution of the complementarity model. In each iteration of this method, each complementariry subproblem is relaxed by omitting some of its complentary equations before solution. The proposed method is tested on an example network and the obtained results are compared with the results of the previous method.

Keywords: ***Transit Assignment, Wardropian Equilibrium, Capacity Constraint, Dynamic Penalty Function.***